Cohomology of Groups and Association Schemes (Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics)

飛田, 明彦

数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 87-94

Cohomology of Groups and Association Schemes

飛田 明彦 (Akihiko Hida)
埼玉大学教育学部
Faculty of Education, Saitama University

1. Introduction

G を有限群, M を (右) G-加群とする. G の M を係数とする cohomology 群 $H^*(G,M)$ は M の $\mathbb{Z}G$-加群としての自由分解, 特に bar resolution を用いて定義される. これらの cohomology 群には群論的な解釈が知られており, $H^1(G,M)$ は半直積における補群と対応し, $H^2(G,M)$ は群の拡大と対応している. ここでは, association scheme を群を一般化したものとして捉え, その拡大の理論について考察する. また, 群の cohomology の一般化として, association scheme (X,G) の加群 M を係数とする cohomology の類似物を定義し, その性質について考察したい. ただし, これは

- 何らかの加群等の complex の cohomology として定義されるわけではない
- 群の場合と異なり, 2次の cohomology が拡大全てを記述している訳ではない

等の点で不十分なものであるとも思われる. [BH] では別の観点から, 群の cohomology と association scheme について考察されている.

以下, 非常に良く知られたことではあるが, bar resolution を用いた群の cohomology 群の構成と低次の cohomology 群の解釈について簡単にまとめておく ([B], [S] 参照). これらを association scheme の場合に拡張したいのである. G を群, M は G が右から作用する加法群であるとする.

$$\{[g_1|\cdots|g_n] \mid g_1,\ldots,g_n \in G-\{1\}\}$$

を基底とする自由 $\mathbb{Z}G$-加群を B_n とする. $\mathbb{Z}G$-準同型 $d_n : B_n \longrightarrow B_{n-1}$ を

$$\begin{aligned} d_n[g_1|\cdots|g_n] =& [g_2|\cdots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|\cdots|g_ig_{i+1}|\cdots|g_n] \\ &+(-1)^n[g_1|\cdots|g_{n-1}]g_n \end{aligned}$$

と定義すると

$$\cdots \longrightarrow B_1 \xrightarrow{d_1} B_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は $\mathbb{Z}$ の自由分解となる. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(B_n,M)$ は

$$C^n(G,M) = \{f : G^n \longrightarrow M \mid \text{ある } i \text{ に対して } g_i = 1 \text{ ならば } f(g_1,\ldots,g_n) = 0\}$$

と同一視され,

$$\partial_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(d_{n+1},M) : C^n(G,M) \longrightarrow C^{n+1}(G,M)$$

は

$$\partial_n f(g_1,\ldots,g_{n+1}) = f(g_2,\ldots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\ldots,g_n)g_{n+1}$$

で与えられる. n 次の cohomology 群は

$$H^n(G,M) = \mathrm{Ker}\ \partial_n/\mathrm{Im}\ \partial_{n-1}$$

と定義される.

G の M による拡大とは, 群の短完全列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

のことである. 2つの拡大

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha_i} K_i \xrightarrow{\beta_i} G \longrightarrow 1 \qquad (i=1,2)$$

が同値とは

$$\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$$

で $\varphi\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2\varphi$ となるものが存在することである. G_0 を G と M の半直積とする. 自然な分裂拡大

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\alpha} G_0 \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$$

に対して, $\gamma : G \longrightarrow G_0$ で $\beta\gamma = id_G$ なるものを splitting と呼ぶ. 2つの splitting γ_1, γ_2 に対して, $m \in M$ で任意の $g \in G$ に対し $\gamma_1(g) = \alpha(m)\gamma_2(g)\alpha(m)^{-1}$ となるものが存在するとき γ_1 と γ_2 は M-共役であるという. 1次と2次の cohomology に関しては次が成立する.([B,IV(2.3),(3.12)])

(1.1) spliting の共役類の集合と $H^1(G,M)$ の間に一対一の対応がある.

(1.2) G の M による拡大で, 共役による作用がもとの G の M への作用になっているものの同値類の集合と $H^2(G,M)$ の間に一対一の対応がある.

以下2章では association scheme について定義等簡単にまとめ, 3章で association scheme の拡大の一般論を準備する. 4章では, association scheme (X,G) の 加群 M を係数とする cohomology の類似 $H^*(G,M)$ を上記 bar resolution による構成を模倣して定義する. 5章で上記 (1.2) に対応する結果を, 6章で上記 (1.1) に対応する結果を述べる. 最後に7章で具体例の計算結果を紹介する.

2. Association schemes

ここでは association scheme, 特に closed subset と factor association scheme についてごく簡単に述べる. (詳しくは [Z] を参照.)

Definition 2.1 X を有限集合, G を $X \times X$ の分割, つまり $X \times X = \bigcup_{g\in G} g$ は disjoint で $\emptyset \notin G$ とする. また $1_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \in G$ であり, $g \in G$ ならば $g^* = \{(y,x) \mid (x,y) \in g\} \in G$ であるとする. さらに, 任意の $g,h,k \in G$ に対し, $a_{ghk} \in \mathbb{Z}$, $a_{ghk} \geq 0$ で任意の $(x,y) \in k$ に対して

$$|\{z \in X \mid (x,z) \in g, (z,y) \in h\}| = a_{ghk}$$

をみたすものが存在するとき, (X, G) を association scheme という.

Example 2.2 G を有限群とし, $g \in G$ に対して,

$$\tilde{g} = \{(x, y) \in G \times G \mid y = xg\}$$

$$\tilde{G} = \{\tilde{g} \mid g \in G\}$$

とおく. このとき $(G, \tilde{G})$ は association scheme となる.

Definition 2.3 (X, G) を association scheme とする. $g, h, k \in G$ に対して,

$$gh = \{l \in G \mid a_{ghl} > 0\}$$

$$ghk = \bigcup_{l \in gh} lk$$

とおく. また, $(x, y) \in g$ のとき $xy = g$ とおく.

Definition 2.4 association scheme (X, G) が thin であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対して,

$$|\{y \in X \mid (x, y) \in g\}| = 1$$

となることである.

Remark 2.5 (X, G) が thin association scheme のとき, G は群構造を持つ. つまり, 任意の $g, h \in G$ に対し $|gh| = 1$ であり, $gh = \{k\}$ のとき $gh = k$ とおくことにより G は群となる. このとき, $(X, G) \simeq (G, \tilde{G})$ である.

Definition 2.6 (X, G) を association scheme とする. $H(\neq \emptyset) \subseteq G$ が G の closed subset であるとは, 任意の $h, k \in H$ に対して, $h^*k \subseteq H$ となることである.

Definition 2.7 (X, G) を association scheme, H を G の closed subset とする. $x \in X$ に対し,

$$xH = \{y \in X \mid xy \in H\}$$

$$H_{xH} = \{h_{xH} \mid h \in H\} \text{ ただし } h_{xH} = \{(y, z) \in h \mid y, z \in xH\}$$

とおく. また $g \in G$ に対し,

$$g^H = \{(xH, yH) \mid xy \in hgk,\ \exists h, k \in H\}$$

とおき,

$$X/H = \{xH \mid x \in X\}$$

$$G//H = \{g^H \mid g \in G\}$$

とおく.

Proposition 2.8 (X, G) を association scheme とする.
(1)([Z, Theorem 1.5.1]) closed subset H と $x \in X$ に対して, (xH, H_{xH}) は association scheme である.
(2)([Z, Theorem 1.5.4]) closed subset H に対して, $(X/H, G//H)$ は association scheme である.
(3)([Z, Theorem 2.3.4]) $(X/R, G//R)$ が thin となる様な最小の closed subset R が存在

する. (thin residue と呼ばれる.) 以下, $\bar{G} = G//R$ とおく.

3. Extensions of association schemes

始めに, association scheme の準同型を [Z, 1.7] に従って定義する.

Definition 3.1 (X, G), (Y, H) を association scheme とする.

$$\varphi = (\varphi_X, \varphi_G) : (X, G) \longrightarrow (Y, H)$$

が homomorphism であるとは,

$$\varphi_X : X \longrightarrow Y, \qquad \varphi_G : G \longrightarrow H$$

であり, $x_1, x_2 \in X$, $g \in G$ に対して,

(1)$(x_1, x_2) \in g$ ならば $(\varphi_X(x_1), \varphi_X(x_2)) \in \varphi_G(g)$

(2)$(\varphi_X(x_1), \varphi_X(x_2)) \in \varphi_G(g)$ ならば$\varphi_X(x_i) = \varphi_X(z_i), \exists(z_1, z_2) \in g$

となることである.

次に短完全列の定義を行いたい. X には単位元に相当するものがないので, 基点をひとつ固定して考えることにする. 以下 association scheme (X, G) に対し, $x_0 \in X$ を固定しておく.

Definition 3.2 (X, G), (Y, H), (Z, K) を assocoation scheme とする.

$$(Y, H) \xrightarrow{\alpha} (Z, K) \xrightarrow{\beta} (X, G)$$

が次をみたすとき, この列を (X, G) の (Y, H) による拡大であるという.
(1)$\alpha = (\alpha_Y, \alpha_H)$, $\beta = (\beta_Z, \beta_K)$ は association scheme の homomorphism で, α_Y, α_H は単射, β_Z, β_K は全射である.
(2)$\beta_K^{-1}(1_X) = \mathrm{Im}\ \alpha_H$.
(3)$\beta_Z^{-1}(x_0) = \mathrm{Im}\ \alpha_Y$.

Example 3.3 (X, G) を assocoation scheme, H を G の closed subset とする. このとき, 自然な準同型の列

$$(x_0H, H_{x_0H}) \longrightarrow (X, G) \longrightarrow (X/H, G//H)$$

は $(X/H, G//H)$ の (x_0H, H_{x_0H}) による (基点 x_0H に関する) 拡大である.

次に２つの拡大が同値であるということを群の拡大の場合と同様に定義する.

Definition 3.4 ２つの拡大

$$E_i \ : \ (Y, H) \xrightarrow{\alpha_i} (Z_i, K_i) \xrightarrow{\beta_i} (X, G) \qquad (i = 1, 2)$$

に対し, 同型

$$\varphi : (Z_1, K_1) \xrightarrow{\sim} (Z_2, K_2)$$

で $\varphi\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2\varphi$ をみたすものが存在するとき, E_1 と E_2 は同値であるという.

4. Cohomology of association schemes

(X, G) を association scheme, $x_0 \in X$, M を有限(右) $\bar{G}$-加群とする. $m \in M$ と $g \in G$ に対して, $mg = m(g^R)$ とおく. R は G の thin residue, $\bar{G} = G//R$ である.

Definition 4.1 $n > 0$ に対し,

$$C^n(X, M) = \{\sigma : X^n \longrightarrow M \mid \sigma(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ if } x_{i-1} = x_i,\ 1 \leq \exists i \leq n\}$$

$$C^n(G, M) = \{f : G^n \longrightarrow M \mid f(g_1, \ldots, g_n) = 0 \text{ if } x_i = 1_X,\ 1 \leq \exists i \leq n\}$$

とおく. $C^0(X, M) = C^0(G, M) = M$ とする. $n > 0$ に対して,

$$\lambda_n : C^n(G, M) \longrightarrow C^n(X, M)$$

を

$$\lambda_n(f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n)$$

とし, $\lambda_0 = id_M$ とする.

次に, $\partial_n : C^n(G, M) \longrightarrow C^{n+1}(X, M)$ を, $n > 0$ に対しては,

$$\begin{aligned}\partial_n(f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1x_2, \ldots, x_nx_{n+1}) &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(x_0x_1, \ldots, x_{i-1}x_{i+1}, \ldots, x_nx_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(x_0x_1, \ldots, x_{n-1}x_n)x_nx_{n+1}\end{aligned}$$

と定義し, $\partial_0 : M \longrightarrow C^1(X, M)$ は,

$$\partial_0(m)(x_1) = m - mx_0x_1$$

とする.

Example 4.2 $n = 1$ の場合,

$$\partial_1(f)(x_1, x_2) = f(x_1x_2) - f(x_0x_2) + f(x_0x_1)x_1x_2.$$

Definition 4.3 $n > 0$ に対して, cohomology 群の類似物を次のように定義する.

$$Z^n((X, G), M) = \lambda_n(\mathrm{Ker}\ \partial_n) + \mathrm{Im}\ \partial_{n-1}$$

$$B^n((X, G), M) = \mathrm{Im}\ \partial_{n-1}$$

$$H^n((X, G), M) = Z^n((X, G), M)/B^n((X, G), M)$$

(X, G) が thin association scheme の場合, λ_n は全単射である. λ_n を通して $C^n(G, M)$ と $C^n(X, M)$ を同一視すると, 上記の ∂_n は 1 章で述べた群の場合のものと一致する. また $G = \bar{G}$ である. よって,

Theorem 4.4 (X, G) が thin ならば, $H^n((X, G), M) \simeq H^n(G, M)$.

5. H^2 and extensions

ここでは, $H^2((X, G), M)$ の元から (X, G) の $(M, \tilde{M})$ による拡大が構成されることを示したい. 後に見る様に (Proposition 7.1(1)) これだけでは拡大を記述するためには全く不十分である. 以下考察の範囲を広げるが, これでもなお不十分ではある.

Definition 5.1 $\tilde{Z}^2((X,G),M)$ を次の２条件をみたす$\sigma \in C^2(X,M)$ の全体の集合とする.

(1) 写像 $\varphi : G \longrightarrow M$ で任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\sigma(x_2,x_1) + \sigma(x_1,x_2)x_1x_2 = \varphi(x_1x_2)$$

となるものが存在.
(2) 任意の $g,h,k \in G$、$m \in M$ に対して, 非負整数 $b_{ghk,m}$ で, 任意の $(x_1,x_2) \in k$ に対して,

$$|\{x \in X \mid (x_1,x) \in g, (x,x_2) \in h, \sigma(x_1,x)h + \sigma(x,x_2) - \sigma(x_1,x_2) = m\}| = b_{ghk,m}$$

となるものが存在.

Definition 5.2 $\sigma \in C^2(G,M)$ に対して, $X_\sigma = X \times M$ とおく. また, $(g,m) \in G \times M$ に対して,

$$(g,m)_\sigma = \{((x_1,m_1),(x_2,m_2)) \in X_\sigma \times X_\sigma \mid (x_1,x_2) \in g,\ -m_1g + m_2 = m + \sigma(x_1,x_2)\}$$

とし,

$$G_\sigma = \{(g,m)_\sigma \mid g \in G,\ m \in M\}$$

とおく.

G_σ は X_σ の分割であり, (X_σ, G_σ) が association scheme となるための条件が先にあげたものになる. 次が主定理である.

Theorem 5.3 (1)(X_σ, G_σ) が association scheme となるための必要十分条件は $\sigma \in \tilde{Z}^2((X,G),M)$ となることである.
(2)$Z^2((X,G),M) \subseteq \tilde{Z}^2((X,G),M)$ である. 以下,

$$\tilde{H}^2((X,G),M) = \tilde{Z}^2((X,G),M)/B^2((X,G),M)$$

とおく.
(3)$\sigma \in \tilde{Z}^2((X,G),M)$ に対して,

$$E(\sigma) : (M,\tilde{M}) \xrightarrow{\alpha} (X_\sigma, G_\sigma) \xrightarrow{\beta} (X,G)$$

$$\alpha_M(m) = (x_0,m),\ \ \beta_{X_\sigma}(x,m) = x$$
$$\alpha_{\tilde{M}}(\tilde{n}) = (1_X,n)_\sigma,\ \ \beta_{G_\sigma}(g,n)_\sigma = g$$

は (X,G) の $(M,\tilde{M})$ による拡大である.
(4) $\sigma,\sigma' \in \tilde{Z}^2((X,G),M)$ に対して, $E(\sigma)$ と $E(\sigma')$ が同値であるための必要十分条件は $\sigma - \sigma' \in B^2((X,G),M)$ となることである.

Definition 5.4 (X,G) の $(M,\tilde{M})$ による拡大

$$(M,\tilde{M}) \xrightarrow{\alpha} (Z,K) \xrightarrow{\beta} (X,G)$$

で任意の $k \in K$, $m \in M$ に対し

$$k^* \alpha_{\tilde{M}}(\tilde{m}) k \cap \mathrm{Im}\ \alpha_{\tilde{M}} = \{\alpha_{\tilde{M}}((m\beta(k))\check{\ })\}$$

となるものの同値類の集合を $\mathcal{E}((X,G),M)$ で表す.

上の条件は群の場合, G の M への共役による作用がもとの作用と一致しているということである. Theorem 5.3 より次が得られる. (X,G) が thin assocation scheme の場合は (1) は等号となり, (2) は全単射 (つまり (1.2)) となるのである.

Corollary 5.5 (1)$H^2((X,G),M) \subseteq \tilde{H}^2((X,G),M)$.
(2) 単射 $\tilde{H}^2((X,G),M) \longrightarrow \mathcal{E}((X,G),M)$ が存在する.

6. H^1 and split extensions

(X,G) を association scheme, $x_0 \in X$, M は有限右 $\bar{G}$-加群, $\bar{G} = G//R$, R は G の thin residue とする. 拡大

$$E(0) : (M, \tilde{M}) \xrightarrow{\alpha} (X_0, G_0) \xrightarrow{\beta} (X,G)$$

を考える. ただし,

$$X_0 = X \times M$$
$$G_0 = \{(g,n)_0 \mid g \in G, n \in M\}$$
$$(g,n)_0 = \{((x_1,m_1),(x_2,m_2)) \mid (x_1,x_2) \in g, -m_1 g + m_2 = n\}$$

である.

Definition 6.1 homomorphism $\gamma = (\gamma_X, \gamma_G) : (X,G) \longrightarrow (X_0, G_0)$ が

$$\beta\gamma = id_{(X,G)},\ \ \gamma_X(x_0) = (x_0, 0_M)$$

をみたすとき, γ を ($E(0)$ に関する) splitting という. γ と γ' を splitting とする. $m \in M$ で任意の $g \in G$ に対し,

$$\{\gamma'_G(g)\} = \alpha_{\tilde{M}}(\tilde{m})\gamma_G(g)\alpha_{\tilde{M}}(\tilde{m})^*$$

となるものが存在するとき, γ と γ' は M-共役であるという.

群の場合と同様次 (つまり (1.1)) が成立する.

Theorem 6.2 $H^1((X,G),M)$ と splitting の M-共役類の集合の間に一対一の対応がある.

7. Example

ここでは最も簡単な association scheme について, $\tilde{H}^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を考える. 群の場合と異なり, 計算するための道具がなく定義より直接決定していくしか方法がなさそうである.

以下, $X = \{1,2,\ldots,n\}$, $n \geq 3$, $G = \{1_X, \Delta\}$, $\Delta = \{(x,y) \mid x \neq y\}$ とおく. G の thin residue は G 自身であり, $\bar{G}$ は自明な群である. $\bar{G}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ への自明な作用を考える.

Proposition 7.1 (1) $H^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$.
(2) n が奇数ならば $\tilde{H}^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$.

n が偶数の場合, 一般には決定できていないが $n=4$ の場合は簡単に記述することができる. 一般には $\tilde{H}^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は加群の部分集合であり群にはならないが, この場合は群となっている.

Example 7.2 $n=4$ のとき $\tilde{H}^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

実際 $\tilde{Z}^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は次の 4 つの元から成る.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

但し $\sigma \in C^2(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, つまり $\sigma : X \times X \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を行列 $(\sigma(i,j))_{1\le i,j\le 4}$ で表している. また, 基点 $x_0 = 1$ としている. 左の 2 つは $B^2((X,G),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元である.

References

[BH] S. Bang and M. Hirasaka, *Construction of association schemes from difference sets*, preprint

[B] K. S. Brown, Cohomology of Groups, Graduate texts in mathematics, 87, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982

[S] 鈴木通夫, 群論 (上), 岩波書店, 1977

[Z] P.-H. Zieschang, An algebraic approach to Association schemes, Lecture Notes in Mathematics 1628, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996